Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

dysleksja

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 180 minut

Przed maturą
MAJ 2011 r.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 12 stron (zadania 1 – 10). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Wydawca: OFICYNA EDUKACYJNA * KRZYSZTOF PAZDRO Sp. z o.o.

Zadanie 1. (4 pkt)

Liczby $\frac{1}{2} + \log_4 x^3$, $\log_4 4x$, $\log_4 \sqrt{x}$ w podanej kolejności, dla pewnej rzeczywistej wartości x, są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Wyznacz x oraz sumę czterdziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

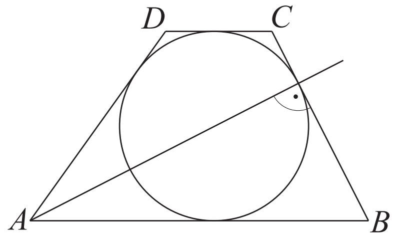
Zadanie 2. (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\left||x-4|-x\right| = m$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Zadanie 3. (5 pkt)

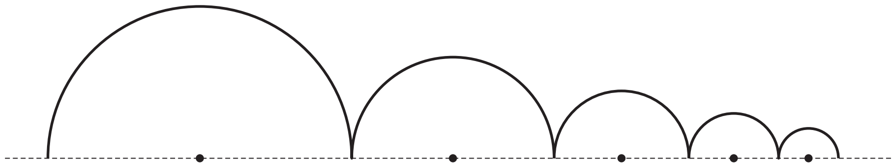
W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek obok). Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia BC.

a) Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC.
b) Oblicz $|BC| : |DC|$.



Zadanie 4. (4 pkt)

Z półokręgów budujemy krzywą (patrz rysunek poniżej). Pierwszy półokrąg ma promień długości r, $r > 0$, a promień każdego następnego półokręgu stanowi $\frac{2}{3}$ promienia poprzedniego. Niech n oznacza liczbę półokręgów tworzących tę krzywą. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n długość krzywej jest mniejsza od $3\pi r$.

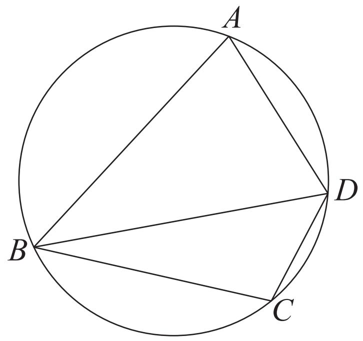


Zadanie 5. (6 pkt)

Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą k: $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 30. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.

Zadanie 6. (5 pkt)

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$ (patrz rysunek obok). Przekątna BD czworokąta ma długość 12. Iloczyn sinusów wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta jest równy $\frac{3}{16}$. Wiedząc, że $|\sphericalangle A| < |\sphericalangle C| < |\sphericalangle D|$, oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.



Zadanie 7. (5 pkt)

W wyniku podzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x+2)$ otrzymujemy iloraz $Q(x)$ i resztę 0. Jeśli natomiast podzielimy wielomian $W(x)$ przez $(x+1)$, to otrzymamy iloraz $Q(x)+2x-3$ i resztę 2.

a) Wyznacz wielomian $W(x)$.

b) Rozwiąż nierówność $W(x) \le -(x+1)(x+2)$.

Zadanie 8. (4 pkt)

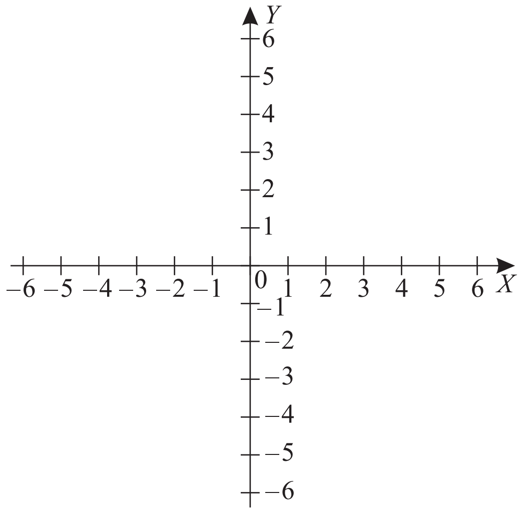
Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno, bez zwracania trzy cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową: pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą setek, druga – cyfrą dziesiątek, a trzecia – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymana liczba ma następującą własność: różnica między największą i najmniejszą cyfrą tej liczby jest nie większa niż 3.

Zadanie 9. (6 pkt)

Dane jest równanie kwadratowe $(m-1)x^2 + 2x + 3 - m = 0$ z niewiadomą x i parametrem m.

a) Znajdź wzór i dziedzinę funkcji f, która zmiennej rzeczywistej m przyporządkowuje iloczyn dwóch różnych pierwiastków danego równania. Naszkicuj wykres funkcji f w prostokątnym układzie współrzędnych.

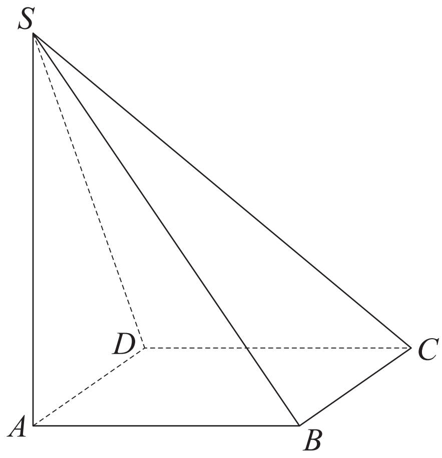
b) Wykaż, że do wykresu funkcji f należą tylko trzy punkty o obu współrzędnych całkowitych.



Zadanie 10. (6 pkt)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest kwadrat *ABCD* (patrz rysunek obok). Krawędź *AS* jest wysokością tego ostrosłupa. Odległość punktu *B* od krawędzi *CS* jest równa *d,* a kąt dwuścienny między ścianami *BCS* i *CDS* ma miarę 2α, gdzie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Oblicz:

a) odległość punktu *A* od krawędzi *CS*
b) wysokość tego ostrosłupa.



BRUDNOPIS