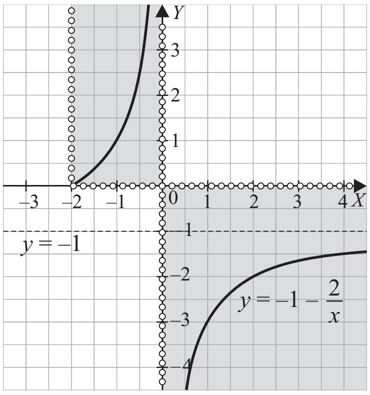
PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

PROPOZYCJA SCHEMATU OCENIANIA ARKUSZA
Z POZIOMU ROZSZERZONEGO

Numer zadania		Kolejne etapy rozwiązania	Liczba punktów
1	1.1	Obliczenie współrzędnych wierzchołka C: $C(-4, 4)$ <u>I sposób</u> C jest punktem przecięcia okręgu o równaniu $x^2 + (y - 1)^2 = 25$ i prostej k o równaniu $y = -x$, gdzie $x < 0$. <u>II sposób</u> $\|CE\| = \frac{1}{2}\|AB\|$, gdzie E – środek odcinka AB, $C(x, -x)$ i $x < 0$. <u>III sposób</u> $\|AC\|^2 + \|CB\|^2 = \|AB\|^2$, gdzie $C(x, -x)$ i $x < 0$.	2
	1.2	Obliczenie pola $\quad ABC$ ($P_{\quad ABC} = 20$) i ustalenie skali jednokładności: $k = -\frac{1}{2}$.	1
	1.3	Obliczenie współrzędnych środka jednokładności S z warunku $SC \qquad \frac{1}{2}SC$: $S(3, -1)$.	2
2	2.1	Wyznaczenie liczby wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego: $\overline{\overline{\Omega}} \quad \binom{15}{1}\binom{15}{1} = 225$.	1
	2.2	Oznaczenie: x – liczba żółtych piłeczek w koszyku, $x \quad \{1, ..., 14\}$; wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A_x – wylosowane piłeczki są różnych kolorów: $\overline{\overline{A_x}} \quad 2\binom{x}{1}\binom{15 \quad x}{1} = -2x^2 + 30x$	1
	2.3	Obliczenie $P(A_x)$: $P(A_x) = -\frac{2}{225}x^2 \quad \frac{2}{15}x$.	1
	2.4	Wyznaczenie argumentu x, dla którego funkcja $P(A_x)$ przyjmuje największą wartość w zbiorze $\{1, ..., 14\}$, wraz z uzasadnieniem: $x = 7$ lub $x = 8$.	2
3	3.1	Obliczenie wartości parametru p: $p = 2$.	1
	3.2	Naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = \|f(x)\|$.	1
	3.3	Obliczenie współrzędnych punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY: $(0, \quad \log_{\frac{1}{2}} 12)$.	1
	3.4	Podanie zbioru wartości parametru k, dla których spełnione są warunki zadania: $k \quad (\quad \log_{\frac{1}{2}} 12, + \quad)$.	1

4	4.1	Obliczenie $\sin\lvert\sphericalangle ACB\rvert = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ I sposób • Obliczenie pola ABC ze wzoru Herona: $P = 10\sqrt{3}$. • Obliczenie $\sin\lvert\sphericalangle ACB\rvert$: $\sin\lvert\sphericalangle ACB\rvert = \frac{2P}{\lvert AC\rvert \quad \lvert BC\rvert} \quad \frac{4\sqrt{3}}{7}$. lub II sposób • Obliczenie $\cos\lvert\sphericalangle ACB\rvert$ z tw. cosinusów: $\cos\alpha = \frac{1}{7}$. • Obliczenie $\sin\lvert\sphericalangle ACB\rvert$ z „jedynki trygonometrycznej”: $\sin\lvert\sphericalangle ACB\rvert = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.	2
	4.2	Obliczenie długości promienia koła opisanego na ABC: $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.	1
	4.3	Obliczenie długości odcinka CD na podstawie tw. Pitagorasa dla COD: $\lvert CD\rvert = \frac{35}{3}$.	1
	4.4	Zastosowanie tw. o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych do zapisania warunku: $9x^2 + 72x - 1225 = 0$, gdzie $x = \lvert BD\rvert$.	1
	4.5	Wyznaczenie dziedziny równania $9x^2 + 72x - 1225 = 0$; $x \quad 6\frac{2}{3}, 10\frac{2}{3}$.	1
	4.6	Rozwiązanie równania ($x = -16\frac{1}{3} \quad x = 8\frac{1}{3}$) i sformuowanie odpowiedzi: $\lvert BD\rvert = 8\frac{1}{3}$.	1
5	5.1	a) Wykazanie, że równość jest tożsamością trygonometryczną, np: $P = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (\sin\alpha - \sin\beta) \quad (\sin\alpha + \sin\beta) =$ $= 2\cos\frac{\alpha \quad \beta}{2} \quad \sin\frac{\alpha \quad \beta}{2} \quad 2\sin\frac{\alpha \quad \beta}{2} \quad \cos\frac{\alpha \quad \beta}{2} =$ $= \quad 2\sin\frac{\alpha \quad \beta}{2}\cos\frac{\alpha \quad \beta}{2} \quad 2\sin\frac{\alpha \quad \beta}{2}\cos\frac{\alpha \quad \beta}{2} \quad =$ $= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = L$	2
	5.2	b) Zapisanie założenia twierdzenia, np. w postaci: $\sin(\alpha-\beta) \quad [1 - \sin(\alpha+\beta)] = 0$, gdzie α, β – kąty trójkąta.	1
	5.3	Wykazanie, że: • z warunku $\sin(\alpha-\beta) = 0$ wynika, że trójkąt jest równoramienny; • z warunku $1 - \sin(\alpha+\beta) = 0$ wynika, że trójkąt jest prostokątny.	1 1

6	6.1	Zastosowanie tw. o reszcie: $W(-1) = -2$ i otrzymanie równania $4^{m-1} = 2^m$.	1
	6.2	Obliczenie wartości parametru: $m = 2$.	1
	6.3	Ustalenie wzoru wielomianu $W(x) = 4x^3 - 3x - 1$ i stwierdzenie, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu.	1
	6.4	Zastosowanie tw. Bezouta i podzielenie wielomianu W przez dwumian $(x-1)$: iloraz $P(x) = 4x^2 + 4x + 1$.	1
	6.5	Obliczenie pierwiastków wielomianu P: $P(x) = (2x+1)^2$; liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem dwukrotnym.	1
	6.6	Podanie zbioru rozwiązań nierówności $W(x) \quad 0$: $\quad \frac{1}{2} \qquad 1, + \quad)$.	1
7	7.1	Zapisanie układu warunków: $\lvert DC\rvert^2 \quad \lvert CE\rvert^2 \quad \lvert DE\rvert^2$ (tw. Pitagorasa dla ΔDEC) $\lvert CE\rvert^2 \quad \lvert EB\rvert^2 \quad \lvert BC\rvert^2$ (tw. Pitagorasa dla ΔEBC) $\frac{\lvert CF\rvert}{\lvert FE\rvert} \quad \frac{\lvert CB\rvert}{\lvert EB\rvert}$ (tw. o dwusiecznej kąta wewnętrznego w ΔCEB) skąd $a^2 \quad x^2 \quad 313$ $x^2 \quad y^2 \quad a^2$ $\frac{a}{y} \quad \frac{13}{5}$ gdzie $\lvert DC\rvert = \lvert CB\rvert = a$, $\lvert EB\rvert = y$, $\lvert CE\rvert = x$; $a, x, y \quad \boldsymbol{R}_+$.	3
	7.2	Wyznaczenie długości wysokości CE oraz długości boku rombu z układu warunków: $\lvert CE\rvert = 12$, $a = 13$.	2
	7.3	Obliczenie pola rombu: 156.	1
8	8.1	Zapisanie warunków: $x(y \quad 1) \quad \frac{xy \quad 2 \quad x}{2}$ (lub $x \quad 2 \qquad xy$) $x(y \quad 1) \quad xy \quad 2 \quad 0$ (lub $x \quad x(y \quad 1) \quad 0$)	2
	8.2	Zapisanie warunków zadania w postaci: $y \qquad 1 \quad \frac{2}{x}$ $x \qquad 2$ (lub $xy \quad 0$)	1

	8.3	Przedstawienie szukanego zbioru punktów w układzie współrzędnych: 	2
9	9.1	Obliczenie długości odcinków KL, KM oraz ML: $4\sqrt{2}$.	1
	9.2	Obliczenie pola KLM: $P = 8\sqrt{3}$.	1
	9.3	Obliczenie objętości ostrosłupa $KBLM$: $V = 10\frac{2}{3}$.	1
	9.4	Obliczenie odległości wierzchołka B od płaszczyzny przekroju KLM: $d = \frac{3V}{P_{\Delta KLM}}$, skąd $d = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.	1
10	10.1	Zapisanie iloczynu k kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, gdzie $a_1, q \quad \boldsymbol{R}_+$, w postaci: $I = a_1 \quad q^{1+2+3+\ldots(k-1)}$.	1
	10.2	Zapisanie iloczynu wyrazów ciągu w postaci: $I = a_1^k \quad q^{\frac{k(k \quad 1)}{2}}$.	1
	10.3	Wykazanie, że $I = \sqrt{(a_1 \quad a_k)^k}$.	1