

## Konspekt lekcji matematyki z wykorzystaniem tablicy aktywnej

**Klasa:** trzecia technikum po gimnazjum

**Czas trwania:** 90 minut

**Temat lekcji:** Suma  $n$  - początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

### Cel ogólny:

- kształcenie samodzielności pracy
- rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem
- ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań dotyczących sum początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

### Cele szczegółowe zajęć:

Uczeń:

- rozumie pojęcie sumy  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- potrafi obliczyć sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

### Formy i metody:

- praca indywidualna
- praca w grupie

### Środki dydaktyczne:

tablica interaktywna

rzutnik multimedialny

zadania przygotowanie przez nauczyciela

Poradnik multimedialny „Ciągi liczbowe”. <https://www.gov.pl/web/zdalnelekcje/matematyka-pazdziernik-2020-r7>

lub

<https://zpe.gov.pl/a/ciagi---suma-wyrazow-ciagu-arytmetycznego/D13TG6Mgc>

### Wprowadzenie do zajęć

Zapoznanie z poradnikiem multimedialnym oraz wyjaśnienie zasad pracy na lekcji.

Lekcja jest prowadzona z wykorzystaniem poradnika multimedialnego „Ciągi liczbowe” (temat 7). <https://zpe.gov.pl/a/ciagi---suma-wyrazow-ciagu-arytmetycznego/D1979GPhQ>

Wspólnie z uczniami omawiamy teorię i rozwiązujemy przykłady zawarte w poradniku. Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania wskazane przez nauczyciela. Podczas lekcji korzystamy z tablicy interaktywnej.

### Przebieg lekcji:

1. Obejrzenie filmu ilustrującego sposób obliczania sumy kilku początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (przykład 1)

Przykład 1

Tomek rozpoczął trening. Pierwszego dnia wykonywał ćwiczenia przez 5 minut, a każdego następnego dnia trenował o 2 minuty dłużej niż dnia poprzedniego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. Zapisanie twierdzenia o sumie wyrazów ciągu arytmetycznego w zeszytach.

### Twierdzenie

Suma  $n$  - początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ) wyraża się wzorem:  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Zwrócić uwagę na tablice matematyczne

## 7. CIĄGI

### • Ciąg arytmetyczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego ( $a_n$ ) o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

3. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1, 6, 8, 9 ze strony

<https://zpe.gov.pl/a/ciagi---suma-wyrazow-ciagu-arytmetycznego/D1979GPhQ>

lub

<https://zpe.gov.pl/a/ciagi---suma-wyrazow-ciagu-arytmetycznego/D13TG6Mgc>

4. Uczniowie rozwiązują wspólnie z nauczycielem przykładowe zadania.

Zadania te mogą być wydrukowane lub zaprezentowane na ekranie lub tablicy interaktywnej. Są one rozwiązywane przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.

### **Przykład 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 50.

Liczy te stanowią ciąg arytmetyczny o wyrazie pierwszym  $a_1 = 1$ , ostatnim  $a_{50} = 50$ .

Szukana suma, to  $S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{1+50}{2} \cdot 50 = 1275$ .

### **Przykład 2.**

Obliczymy sumę stu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego danego wzorem  $a_n = 3n - 25$ .

W ciągu tym  $a_1 = 3 \cdot 1 - 25 = -22$  oraz  $a_{100} = 3 \cdot 100 - 25 = 275$

Wtedy  $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{-22+275}{2} \cdot 100 = 12650$

### **Przykład 3.**

Oblicz sumę wyrazów od dwudziestego do czterdziestego dla ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1 = -8$  i  $r = \frac{1}{2}$ .

Musimy obliczyć  $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{40}$

$$S_{40} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{19}}_{S_{19}} + a_{20} + a_{21} + \dots + a_{40}$$

Więc  $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{40} = S_{40} - S_{19}$

Obliczamy:  $a_{19} = a_1 + 18r = -8 + 18 \cdot \frac{1}{2} = 1$  i  $S_{19} = \frac{-8+1}{2} \cdot 19 = -66\frac{1}{2}$

$a_{40} = a_1 + 39r = -8 + 39 \cdot \frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}$  i  $S_{40} = \frac{-8+11,5}{2} \cdot 40 = 70$

Więc  $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{40} = S_{40} - S_{19} = 70 - \left(-66\frac{1}{2}\right) = 136\frac{1}{2}$

### **Przykład 4.**

Marcin uczył się słówek z języka niemieckiego. Pierwszego dnia nauczył się 40 słówek i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Którego dnia mógł powiedzieć, że ma opanowanych 310 słówek?

Mamy tutaj ciąg arytmetyczny, w którym  $a_1 = 40$  i  $r = -2$ .

Jeżeli Marcin ma nauczyć się 310 słówek tzn. że  $S_n = 310$  i  $a_n > 0$ .

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n \\ 310 &= \frac{2 \cdot 40 + (n-1) \cdot (-2)}{2} \cdot n \\ 310 &= \frac{80 - 2n + 2}{2} \cdot n \\ 310 &= \frac{82 - 2n}{2} \cdot n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
310 &= (41 - n) \cdot n \\
310 &= 41n - n^2 \\
n^2 - 41n + 310 &= 0 \\
\Delta &= 441 \\
\sqrt{\Delta} &= 21 \\
n_1 &= 10 \text{ i } n_2 = 31
\end{aligned}$$

Dla  $n_1 = 10$  wyraz dziesiąty to  $a_{10} = 40 + 9 \cdot (-2) = 22$

Dla  $n_2 = 31$  wyraz dziesiąty to  $a_{10} = 40 + 30 \cdot (-2) = -20 < 0$ , więc sprzeczność.

Odpowiedź: Marcin będzie miał opanowanych 310 słówek dziesiątego dnia.

5. Uczniowie w grupach 3 – 4 osobowych rozwiązują zadania. Następnie prezentują rozwiązania na forum klasy.

grupa 1

**Zadanie 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych parzystych mniejszych od 150.

**Zadanie 2.**

Oblicz sumę stu dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym 6 i różnicy 2.

grupa 2

**Zadanie 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych nieparzystych mniejszych od 200.

**Zadanie 2.**

Oblicz sumę stu dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym 8 i wyrazie czwartym równym  $(-1)$

grupa 3

**Zadanie 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 i mniejszych niż 98.

**Zadanie 2.**

Oblicz sumę stu dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego określonego wzorem  $a_n = 5 - 2n$

grupa 4

**Zadanie 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które podzielone przez 5 dają resztę 2.

**Zadanie 2.**

Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $a_n = 62 - 3n$ .

grupa 5

**Zadanie 1.**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, które podzielone przez 5 dają resztę 2 i są mniejsze niż 387.

**Zadanie 2.**

Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $a_n = 62 - 3n$ .

**Zadania dodatkowe dla chętnych.**

**Zadanie 1.**

Wyznacz różnicę  $r$  wyrazów ciągu arytmetycznego, mając dane:

a)  $a_1 = 20$ ,  $S_{15} = 1035$

b)  $a_n = 4$ ,  $S_n = -696$ ,  $n = 29$

**Zadanie 2.**

Wyznacz liczbę  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego mając dane:  $S_n = 420$ ,  $r = 3$ ,  $a_1 = 7$ .

**Zadanie 3.**

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu  $a_n = 4n - 3$ , które są mniejsze od 125.

**Zadanie 4.**

Rozwiąż równanie:  $7 + 11 + 15 + \dots + x = 1272$ , w którym lewa strona jest suma kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

**Zadanie 5.**

Wyznacz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, którego suma  $n$  początkowych wyrazów wyraża się wzorem:

$$S_n = 3n^2 - n.$$

**Podsumowanie lekcji**

Podsumowanie lekcji i zadanie pracy domowej ćwiczenie 13 i 14 ze strony <https://zpe.gov.pl/a/ciagi---suma-wyrazow-ciagu-arytmetycznego/D13TG6Mgc>

**Ewaluacja lekcji**

Sposób ewaluacji zajęć (link do Testportalu lub Forms Teams wysłany poprzez dziennik elektroniczny). Przed końcem zajęć proponujemy uczniom dokończenie zdań:

- Atmosfera, która panowała na lekcji ...
- Na zajęciach zmieniłbym ...
- Chcę zaproponować, aby ...
- Cenię ...
- Nie lubię, gdy ...